SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Cataldo Grammatico

ALCUNE OSSERVAZIONI SU CONTINUAZIONE UNICA FORTE PER L'OPERATORE DI LAPLACE E SUE POTENZE

11 giugno 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. Diamo un risultato di unicità forte per tutte le potenze dell'operatore di Laplace nel caso di diseguaglianze differenziali con potenziali singolari. Noi dimostriamo anche, nel caso del solo Laplaciano, un risultato che risulta essere ottimale (**Oss. 2.1**). Tutti i risultati qui contenuti sono una generalizzazione di quelli in [8] (vedi bibliografia).

Abstract. We give a strong uniqueness result for all powers of the Laplace operator when dealing with differential inequalities with singular potentials. We exhibit also, for the Laplace operator, a result which turns out to be "optimal" (**Oss. 2.1**). The results in this paper are the generalization of those in [8] (see bibliography).

1 Introduzione

Questo lavoro è stato realizzato in collaborazione con F. Colombini.

Scopo di questo seminario è provare alcuni risultati di continuazione unica forte (suc) per diseguaglianze del tipo

$$\begin{aligned} \left|\triangle^h u(x)\right| \leq |W_0(x)|\,|u(x)| + |W_1(x)|\,|\nabla u(x)| + \cdots \\ + \cdots + |W_h(x)|\,\left|\nabla^h u(x)\right| \qquad x \in \Omega\,, \end{aligned} \tag{1}$$

con $h \in \mathbf{N}$ e Ω intorno dell'origine in $\mathbf{R}^n$.

Denoteremo con $C_\flat^\infty(\Omega)$ tutte le funzioni di $C^\infty(\Omega)$ che sono piatte in zero (ricordiamo che $f(x)$ *è detta piatta in zero se* $D^\alpha f(0) = 0$ *per ogni* $\alpha \in \mathbf{N}^n$). Diremo che la relazione (1) gode della proprietà suc se la sola funzione $u(x) \in C_\flat^\infty(\Omega)$ che verifica (1) è la funzione identicamente zero.

Nella prima parte studieremo il problema nel caso $h = 1$ ossia per stime del tipo

$$|\triangle u(x)| \leq |W_0(x)|\,|u(x)| + |W_1(x)|\,|\nabla u(x)| \qquad x \in \Omega\,, \tag{2}$$

con $W_0(x)$, $W_1(x)$ aventi singolarità in zero.

I primi lavori con $W_0(x)$ e $W_1(x)$ singolari sono dovuti ad Aronszajn, Krzywicki e Szarski [5], i quali studiano potenziali della forma

$$|W_0(x)| \leq |x|^{-2+\varepsilon} \tag{3}$$

$$|W_1(x)| \leq |x|^{-1+\varepsilon} \tag{4}$$

with $\varepsilon > 0$.

In seguito, numerosi autori hanno studiato il problema nel caso $W_0(x)$ e $W_1(x)$ con singolarità di tipo L^p (Hörmander [9], Barceló, Kenig, Ruiz, Sogge [6]); mentre in Fabes, Garofalo, Lin [7] si studia il caso $W_0(x) \in K_n(\Omega)$ e $W_1(x) \equiv 0$.

Nel 1993 Regbaoui [12] prova un risultato di continuazione unica per $W_0(x)$ e $W_1(x)$ verificanti le stime:

$$|W_0(x)| \leq C_1\,|x|^{-2} \tag{5}$$

$$|W_1(x)| \leq C_2\,|x|^{-1} \tag{6}$$

con $C_2 < \dfrac{1}{2}$.

Nel 1997 Grammatico [8] migliora il risultato in Regbaoui, provando la suc proprietà per $W_0(x)$ e $W_1(x)$ come in (5) e (6) ma con $C_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nel 1994 Alinhac e Baouendi [3] dimostrano che per ogni $C > 1$ esiste $u \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, piatta in zero, con *supp* $u \equiv \mathbf{R}^2$ soddisfacente la stima

$$|\Delta u(x)| \leq \frac{C}{r^2} |\partial_\omega u(x)| \qquad x \in \mathbf{R}^2, \tag{7}$$

dove $r = |x|$ e ∂_ω denota la derivata tangenziale. È stato dimostrato in [8] che se $u \in C_b^\infty(\Omega)$ e soddisfa (7) con $C < 1$ allora $u \equiv 0$.

Ricordiamo infine che Wolff [14] ha costruito, per $n \geq 4$, una funzione smooth $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, non identicamente zero, la quale si annulla di ordine infinito in zero e soddisfa $|\Delta u(x)| \leq C |x|^{-1} |\nabla u(x)|$ per qualche $C > 0$.

Nella seconda parte studieremo il problema della suc per le potenze del Laplaciano.

Ricordiamo che per un operatore differenziale $P = P(x, y, t, D_x, D_y, D_t)$ di ordine m $(m \geq 2)$ a coefficienti regolari, definiti in un intorno dell'origine in $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ e di simbolo principale $P_m(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$, Alinhac [1] ha provato, in particolare, il seguente risultato (denotiamo le coordinate di $\mathbf{R}^n$ con (x, y, t) dove $t \in \mathbf{R}^{n-2}$):

Se $p_m(0, 0, 0, 1, \eta, 0)$ ha due radici semplici, non reali e non coniugate, allora esiste un intorno $\mathcal{V}$ dell'origine, due funzioni $a, u \in C^\infty(\mathcal{V})$, entrambe piatte in zero, tale che $Pu - au = 0$ in $\mathcal{V}$ e supp u un intorno dell'origine.

Dunque, se vogliamo ottenere risultati di continuazione unica in C^∞ per operatori ellittici di ordine maggiore di due non è troppo restrittivo considerare il caso Δ^h $(h \in \mathbf{N})$.

Alinhac e Baouendi [2] hanno provato, in particolare, che la suc proprietà vale per la stima (1) quando $h = 2$ e $|W_l(x)| \leq C |x|^{-4+l+\varepsilon}$, $l = 0, 1, 2$.

2 Risultati

In coordinate polari $|x| = r \in (0, +\infty)$ e $\frac{x}{|x|} = \omega \in \mathbf{S}^{n-1}$, l'operatore di Laplace può essere scritto nella forma

$$r^2 \Delta = (r\partial_r)^2 + (n-2)(r\partial_r) + \Delta_\omega \tag{8}$$

dove Δ_ω è l'operatore di Laplace-Beltrami su $\mathbf{S}^{n-1}$.

Notazione: Con $\|\cdot\|$ e $\langle\,,\,\rangle$ denotiamo rispettivamente norma e prodotto scalare in $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$.

Poniamo, per $x \neq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\Omega_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

dove $\Omega_j r = 0$, questo implica che Ω_j è un campo tangente a $\mathbf{S}^{n-1}$.

D'ora in poi $\Omega \equiv B(0,R) = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ |x| < R\}$.

Teorema 2.1 *Se $u \in C_b^\infty(\Omega)$ soddisfa*

$$\left|r^2 \Delta u(x)\right|^2 \leq C_n^2 \left|u(x)\right|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left|\Omega_j u(x)\right|^2 \qquad x \in \Omega, \tag{9}$$

dove $C_n = \dfrac{n-2}{2}$, allora $u \equiv 0$ in Ω.

Osservazione 2.1 *Se $n = 2$ la relazione (9) diventa*

$$\left|r^2 \Delta u(x)\right| \leq \left|\partial_\omega u(x)\right| \qquad x \in \Omega. \tag{10}$$

In dimensione maggiore di due vale il seguente

Teorema 2.2 *In $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 3$, se $u \in C_b^\infty(\Omega)$ soddisfa*

$$\left|r^2 \Delta u(x)\right|^2 \leq C^2 \left|u(x)\right|^2 + \left|r\partial_r u(x)\right|^2 \qquad x \in \Omega, \tag{11}$$

per qualche costante positiva C, allora $u \equiv 0$ in Ω.

Infine, sempre in dimensione maggiore o uguale a tre, si ha

Teorema 2.3 *In $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 3$, se $u \in C_b^\infty(\Omega)$ soddisfa*

$$\left|\Delta u(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{|x|} \left|\nabla u(x)\right| \qquad x \in \Omega, \tag{12}$$

allora $u \equiv 0$ in Ω.

Noi possiamo ora affermare un risultato di continuazione unica per Δ^h, h intero positivo. Poniamo $F_{n,p} = \{\alpha : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}\}$.

Teorema 2.4 *Sia $u \in C_b^\infty(\Omega)$ e verifichi*

$$\left|r^{2h}\triangle^h u\right|^2 \leq \mathcal{C}\,|u|^2 + \mathcal{C}\,|r\partial_r u|^2 + \mathcal{C}\sum_j |\Omega_j u|^2 + \cdots \tag{13}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{h} \mathcal{C}_\nu \left(\sum_{\alpha\in F_{n,h-\nu}} \left|(r\partial_r)^\nu\, \Omega_{\alpha(1)}\Omega_{\alpha(2)}\cdots\Omega_{\alpha(h-\nu)} u\right|^2 \right),$$

con $\mathcal{C}, \mathcal{C}_\nu$ $\nu = 0, \ldots, h$ costanti positive. Se

$$\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_h < ((2h-1)!!)^2 \tag{14}$$

allora $u \equiv 0$.

In coordinate cartesiane $(x_1, \ldots, x_n)$, dal Theorem 2.4, otteniamo il seguente

Teorema 2.5 *Se $u \in C_b^\infty(\Omega)$ e verifica la stima*

$$\left|\triangle^h u\right|^2 \leq \frac{\gamma_0}{|x|^{4h}}\,|u|^2 + \frac{\gamma_1}{|x|^{4h-2}}\,|\nabla u|^2 + \cdots + \frac{\gamma_h}{|x|^{2h}} \sum_{|\alpha|=h} |D^\alpha u|^2\,, \tag{15}$$

con $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_h$ costanti positive e $\gamma_h < \dfrac{((2h-1)!!)^2}{2^h}$, allora $u \equiv 0$.

3 Dimostrazioni

Introduciamo le coordinate $(T, \omega) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ con $T = \lg r$.

Per le dimostrazioni utilizziamo stime a priori tipo Carleman. Le notazioni sono come in [8].

Dim. Teorema 2.1—Sia $V \in C_0^\infty\left((-\infty, +\infty) \times \mathbf{S}^{n-1}\right)$; possiamo scrivere

$$V(T, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} f_{k,l}(T)\, \varphi_{k,l}(\omega) \tag{16}$$

con $\varphi_{k,l}(\omega)$ sistema ortonormale completo di autofunzioni per $\triangle_\omega$.

Notiamo che [$d\omega$ misura standard su $\mathbf{S}^{n-1}$]

$$\iint |V(T,\omega)|^2\, dT d\omega = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} \int |f_{k,l}(T)|^2\, dT \tag{17}$$

poichè

$$\|V(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} |f_{k,l}(T)|^2 \,. \tag{18}$$

Poniamo

$$Q = r^2 \triangle \tag{19}$$

e

$$Q_\tau V = e^{-\tau T} Q(e^{\tau T} V)\,, \tag{20}$$

τ parametro reale.

Ragionando come in [8] si vede facilmente che

$$\iint |Q_\tau V|^2\, dT d\omega \geq 2\tau^2 \int \|\partial_T V(T,\cdot)\|^2\, dT \tag{21}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} (\tau - k)^2 (\tau + k + n - 2)^2 \int |f_{k,l}(T)|^2\, dT\,.$$

Prendiamo ora come parametro τ le soluzioni positive delle seguenti equazioni

$$\tau(\tau + n - 2) = m(m + n - 2) + m + \frac{n-2}{2} \qquad m \in \mathbf{N}\,. \tag{22}$$

È facile vedere che $m < \tau < m + 1$. Fissato τ come appena detto e ragionando come in [8] si deduce

$$\iint |Q_\tau V|^2\, dT d\omega \geq \sum_j \iint |\Omega_j V|^2\, dT d\omega \tag{23}$$

$$+ \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \iint |V|^2\, dT d\omega \; + \tau^2 \iint |\tilde{V}|^2 dT d\omega$$

dove $\tilde{V}(T,\omega) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{l(k)} f_{k,l}(T)\, \varphi_{k,l}(\omega)\,.$

Ponendo $U = e^{\tau T} V$ e $\tilde{U} = e^{\tau T} \tilde{V}$, otteniamo da (23) la seguente stima di Carleman

$$\iint e^{-2\tau T} |QU|^2 \, dT d\omega \geq \sum_j \iint e^{-2\tau T} |\Omega_j U|^2 \, dT d\omega \tag{24}$$
$$+ \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \iint e^{-2\tau T} |U|^2 \, dT d\omega + \tau^2 \iint e^{-2\tau T} |\tilde{U}|^2 dT d\omega ,$$

per ogni $U \in C_0^\infty \left((-\infty, +\infty) \times \mathbf{S}^{n-1}\right)$ e per ogni τ come sopra.

A questo punto, usando le ipotesi e la stima di Carleman appena ottenuta, si può concludere in maniera standard.

Dim. Osservazione 2.1—Basta osservare che in $\mathbf{R}^2$

$$\Omega_1 = -\sin\omega \, \partial_\omega \qquad \text{e} \qquad \Omega_2 = \cos\omega \, \partial_\omega . \tag{25}$$

Così, possiamo concludere applicando il Teorema 2.1.

Dim. Teorema 2.2—Possiamo ripetere la dimostrazione del Teorema 2.1 prendendo come τ le soluzioni positive delle equazioni

$$\tau(\tau + n - 2) = m(m + n - 2) + m + \frac{n-1}{2} \qquad m \in \mathbf{N} . \tag{26}$$

Come nel Teorema precedente, se $n \geq 3$, otteniamo la seguente stima di Carleman

$$\iint e^{-2\tau T} |QU|^2 \, dT d\omega \geq \iint e^{-2\tau T} |\partial_T U|^2 \, dT d\omega \tag{27}$$
$$+ \tau \iint e^{-2\tau T} |U|^2 dT d\omega ,$$

per ogni $U \in C_0^\infty \left((-\infty, +\infty) \times \mathbf{S}^{n-1}\right)$ e per ogni τ come in (26).

A questo punto si conclude in modo standard.

Dim. Teorema 2.3—Basta osservare che con τ come in (22) si ha

$$\iint e^{-2\tau T} |QU|^2 \, dT d\omega \geq \iint e^{-2\tau T} |\partial_T U|^2 \, dT d\omega \tag{28}$$

per ogni $U \in C_0^\infty\left((-\infty,+\infty)\times \mathbf{S}^{n-1}\right)$.

Sommando (24) e (28), si ha

$$\iint e^{-2\tau T}\,|QU|^2\,dT d\omega \geq \frac{1}{2}\sum_j \iint e^{-2\tau T}\,|\Omega_j U|^2\,dT d\omega \tag{29}$$
$$+\frac{\tau^2}{2}\iint e^{-2\tau T}|\tilde{U}|^2 dT d\omega + \frac{1}{2}\iint e^{-2\tau T}\,|\partial_T U|^2\,dT d\omega$$

per ogni $U \in C_0^\infty\left((-\infty,+\infty)\times \mathbf{S}^{n-1}\right)$ e per ogni τ come in (22).

Ora si può concludere nel solito modo.

Il Teorema 2.4 è una estensione del risultato contenuto in [8] (caso $h=1$). Diamo quindi la dimostrazione per $h=2$; da questo caso risulterà chiaro il modo di procedere in generale.

Abbiamo ora bisogno di un Lemma che utilizzeremo per dare stime di Carleman per $\triangle^2$ in $\mathbf{R}^n$. Denotiamo con $(-\triangle_\omega)^{\frac{1}{2}}$ la radice quadrata positiva di $-\triangle_\omega$ considerato come operatore in $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$.

Lemma 3.1 *Siano* $\triangle_\omega$, Ω_j $j=1,\dots,n$ $(n\geq 2)$ *come sopra. Allora per ogni* $u\in C^\infty(\mathbf{S}^{n-1})$ *vale la seguente identità*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\|\Omega_i\Omega_j u\|^2 = \|\triangle_\omega u\|^2 + (3-n)\left\|\sqrt{-\triangle_\omega}\,u\right\|^2. \tag{30}$$

Dim. Lemma 3.1—Ricordiamo le seguenti relazioni per i campi vettoriali Ω_j, ossia

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j\Omega_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n}\Omega_j\omega_j = n-1. \tag{31}$$

L'aggiunto di Ω_j, visto come operatore non limitato su $L^2\left(\mathbf{S}^{n-1}\right)$, è l'operatore

$$\Omega_j^* = (n-1)\omega_j - \Omega_j \qquad j=1,\dots,n. \tag{32}$$

Inoltre $\sum\Omega_j^2$ è l'operatore di Laplace-Beltrami $\triangle_\omega$ sulla sfera unitaria.

La dimostrazione segue ora da questi fatti e in particolare dall'applicazione iterata di (31).

D'ora in avanti prenderemo il parametro τ della forma $\tau = m + \frac{1}{2}$ con $m \in \mathbf{N}$. Denotiamo con L la radice quadrata positiva di $-\Delta_\omega$.

Siamo ora in grado di dare una stima di Carleman per Δ^2.

Proposizione 3.2 *Sia c una costante positiva tale che $c < 9$, allora esiste un numero reale positivo $\tau_0(c)$ tale che la seguente stima*

$$\iint e^{-2\tau T} |PU|^2 \, dT d\omega \geq c\, \tau^{4-2(\nu+l)} \iint e^{-2\tau T} \left|\partial_T^\nu L^l U\right|^2 dT d\omega \tag{33}$$

vale per ogni $U \in C_0^\infty\left((-\infty, +\infty) \times \mathbf{S}^{n-1}\right)$, per ogni $\tau \geq \tau_0(c)$ e per ogni $\nu, l = 0, 1, 2$ tale che $\nu + l \leq 2$.

Dim. Proposizione 3.2—Sia $V \in C_0^\infty\left((-\infty, +\infty) \times \mathbf{S}^{n-1}\right)$ definita come in (16) all'inizio della dimostrazione del Teorema 2.1.

Poniamo

$$P = r^4 \Delta^2 \tag{34}$$

e

$$P_\tau V = e^{-\tau T} P(e^{\tau T} V), \tag{35}$$

τ parametro reale come sopra.

Notiamo che

$$P_\tau = Q_{\tau-2}\, Q_\tau \tag{36}$$

con Q_τ come in (20).

Ricordiamo che (v. (21))

$$\iint |Q_\tau V|^2 \, dT d\omega \geq \tau^2 \int \|\partial_T V(T, \cdot)\|^2 \, dT \tag{37}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} (\tau - k)^2 (\tau + k + n - 2)^2 \int |f_{k,l}(T)|^2 \, dT,$$

dove $f_{k,l}(T)$ sono le componenti radiali di V.

Ora, se

$$Q_\tau V = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} g_{k,l}(T)\, \varphi_{k,l}(\omega) \tag{38}$$

allora

$$\int |g_{k,l}(T)|^2 \, dT = \iint |Q_\tau (V_{k,l})|^2 \, dT d\omega \tag{39}$$

con $V_{k,l} = f_{k,l}(T)\,\varphi_{k,l}(\omega)$. Così, posto $\tilde{\tau} = \tau - 2$, possiamo scrivere

$$\iint |P_\tau V|^2\, dT d\omega \geq \tilde{\tau}^2 \int \|\partial_T\, Q_\tau V(T,\cdot)\|^2\, dT \tag{40}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} (\tilde{\tau} - k)^2\, (\tilde{\tau} + k + n - 2)^2 \int |g_{k,l}(T)|^2\, dT\,,$$

dunque

$$\iint |P_\tau V|^2\, dT d\omega \geq \tilde{\tau}^2 \int \|Q_\tau\, \partial_T V(T,\cdot)\|^2\, dT \tag{41}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} C_{\tau,k} \int |f_{k,l}(T)|^2\, dT\,,$$

dove

$$C_{\tau,k} = (\tilde{\tau} - k)^2\, (\tilde{\tau} + k + n - 2)^2\, (\tau - k)^2\, (\tau + k + n - 2)^2\,. \tag{42}$$

Analizzando tutti i casi possibili, ponendo $U = e^{\tau T} V$, si raggiunge la dimostrazione della Proposizione.

Usando la stima di Carleman appena ottenuta, si può dimostrare il Teorema 2.4 in modo standard.

Tenuto conto del Lemma 3.1, non è difficile vedere che

$$\sum_{i,j} \|D_i D_j u\|^2 = \frac{n-1}{r^2}\, \|\partial_r u\|^2 + \frac{4-n}{r^4}\, \|Lu\|^2 - \frac{3}{r^3}\, \partial_r\, \|Lu\|^2 \tag{43}$$
$$+ \left\|\partial_r^2 u\right\|^2 + \frac{2}{r^2}\, \|\partial_r Lu\|^2 + \frac{1}{r^4}\, \left\|L^2 u\right\|^2\,,$$

per ogni $u \in C^\infty\left(\mathbf{S}^{n-1}\right)$.

Questa identità, tenuto conto del Teorema 2.4 con $h = 2$, implica il Teorema 2.5 per $h = 2$.

I precedenti risultati possono essere estesi a $r^{2h}\Delta^h$, $h \geq 3$.

Ci limitiamo ad osservare che se

$$S = r^{2h}\triangle^h \qquad h \in \mathbf{N} \tag{44}$$

e

$$S_\tau V = e^{-\tau T} S(e^{\tau T} V) \tag{45}$$

allora

$$S_\tau = Q_{\tau-2(h-1)}\, Q_{\tau-2(h-2)} \cdots Q_{\tau-2}\, Q_\tau \,. \tag{46}$$

Usando (46) possiamo ottenere stime di Carleman per l'operatore S così come abbiamo fatto per $\triangle^2$. Più esattamente vale la seguente

Proposizione 3.3 *Sia c una costante positiva tale che $c < ((2h-1)!!)^2$, allora esiste un numero reale positivo $\tau_0(c)$ tale che la seguente stima*

$$\iint e^{-2\tau T} |SU|^2 \, dT d\omega \geq c\,\tau^{2h-2(\nu+l)} \iint e^{-2\tau T} \left|\partial_T^\nu L^l U\right|^2 dT d\omega \tag{47}$$

vale per ogni $U \in C_0^\infty\left((-\infty,+\infty)\times \mathbf{S}^{n-1}\right)$, per ogni $\tau \geq \tau_0(c)$ e per ogni $\nu, l = 0, 1, \ldots, h$ tale che $\nu + l \leq h$.

A questo punto, come nel caso $h = 2$, si dimostrano i Teoremi 2.4 e 2.5 in generale.

Riferimenti bibliografici

[1] S.ALINHAC: *Non-unicité pour des opérateurs différentiels a caractéristiques complexes simples*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **13** (1980), 385–393.

[2] S.ALINHAC, M.S.BAOUENDI: *Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities*, Amer. J. Math. **102** (1980), 179–217.

[3] S.ALINHAC, M.S.BAOUENDI: *A counterexample to strong uniqueness for partial differential equations of Schrödinger's type*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), 1727–1733.

[4] N.ARONSZAJN: *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957), 235–249.

[5] N.ARONSZAJN, A.KRZYWICKI, J.SZARSKI: *A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds*, Ark. Mat. **4** (1962), 417–453.

[6] B.BARCELO, C.E.KENIG, A.RUIZ, C.D.SOGGE: *Weighted Sobolev inequalities for the Laplacian plus lower order terms*, Illinois J. Math. **32** (1988), 230–245.

[7] E.B.FABES, N.GAROFALO, F.H.LIN: *A partial answer to a conjecture of B. Simon concerning unique continuation*, J. Funct. Anal. **88** (1990), 194-210.

[8] C.GRAMMATICO: *A result on strong unique continuation for the Laplace operator*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), 1475–1491.

[9] L.HÖRMANDER: *Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 21–64.

[10] D.JERISON, C.E.KENIG: *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operator*, Ann. of Math. **121** (1985), 463–494.

[11] N.LERNER: *Résultats d'unicité forte pour des opérateurs elliptiques à coefficients Gevrey*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), 1163–1177.

[12] R.REGBAOUI: *Prolongement unique pour les opérateurs de Schrödinger*, Thèse, Université de Rennes, (1993).

[13] R.REGBAOUI: *Strong unique continuation for second order elliptic differential operators*, Seminaire Goulaouic-Schwartz, 1996-1997, exposé III, École Polytechnique.

[14] T.WOLFF: *A counterexample in a unique continuation problem*, Comm. Anal. Geom. **2** (1994), 79–102.